861 Stochastic Fourier Series. I

河田 龍夫 (仙台高工)

1. X_t $(-\infty < t < \infty)$ ヲ stationary process トスル。(Khintchine ノ意味デ). 即チ X_t ヲ chance variables, family デスベテノ t ニ對シテ EX_t^2, EX_t ガ exist スルトスル。更ニ EX_tX_u ハ $|t-u|$ ノ i ノ函數トスル. 茲ニ E ハ mean value (expectation) ヲ表ス. 換言スルト

$$EX_tX_u = \rho(t-u), \ (\rho \text{ ハ even function})$$

吾々ハ一般性ヲ失ハズシテ $EX_t = 0$, $EX_t^2 = 1$ トスル。Khintchine ノ基本定理ニ依レバ

$$\rho(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ix \, dF(x)$$

トカケルコトガ X_t ガ stationary process ナルタメノ必要充分條件デアル。$F(x)$ ハ一ツノ distribution function デアル。

2. $F(x) = 0$ $x \leqq 0$ ト假定スル (以下ノ議論ニ對シテ是ハ本質的ナ假定デナイ). 今 $F(x)$ ノ spectrum ハ discrete スル、即チ λ_i ヲソノ spectrum トスルト Slutsky ハ次ノ事実ヲ証明シタ。(Actualité, Les fonctions aléatoires 1938)

$$\begin{matrix} A_{\lambda T} \\ B_{\lambda T} \end{matrix} = \frac{2}{T}\int_0^T X_t \begin{matrix} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{matrix} \, dt$$

トオク。

$\lambda=\lambda_i$ ノトキニノミ $E(A_{\lambda T}-A_\lambda)\to 0$,

$E(B_{\lambda T}-B_\lambda)\to 0$ $(T\to\infty)$ ナル A_λ, B_λ $(\neq 0)$ ガアル。ソシテ

$$\sum(A_{\lambda_i}^2+B_{\lambda_i}^2)<\infty$$

ガ prob. 1 ヲ以テ成立シ, x_t ガ t ノ函数トシテ B^2. a. p トナリ (prob. 1 デ)

$$\sum_i A_{\lambda_i}\cos\lambda_i t+B_{\lambda_i}\sin\lambda_i t$$

ガソノ Fourier series (stochastic Fourier series) トナル。而モ α_i ヲ

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots<\infty$$

ナル如キ any pos. numbers ノ seq. トシ ε_i ヲ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots<\infty$$

ナル pos. numbers ノ seq. トシ n_i ヲ

$$\frac{\theta_1}{\varepsilon_1^2}+\frac{\theta_2}{\varepsilon_2^2}+\cdots\cdots<\infty,\quad \theta_i=\sum_{n_i+1}^{\infty}\alpha_i$$

ナル如キモノトスル。ソウスルト

$$\sum_1^{n_k}A_{\lambda_i}\cos\lambda_i t+B_{\lambda_i}\sin\lambda_i t$$

ハ $k\to\infty$ ノトキ殆ドスベテノ t デ conv. スル prob. ガ 1 デアル。

3. 吾々ハ $F(x)$ ノ spectrum ガ 0, 1, 2, ……… ニ含マレル場合ヲ考ヘル。コノトキハ stochastic Fourier

series が prob. 1 ヲ以テ alm. everywhere conv. スルコトヲ証明スル.

<u>定理 1.</u> X_t ハ prob. 1 ヲ以テ periodic function (period 2π) トナル。

何トナレバ

$$E(X_{t+2\pi}-X_t)^2 = EX_{t+2\pi}^2 + EX_t^2 - 2EX_{t+2\pi}X_t$$

$$= 1+1-2\rho(2\pi)$$

$$= 2\left(1-\sum_0^\infty a_i\right) = 0$$

コヽニ $F(x)$ ノ spectrum i ニ於ケル jump ヲ a_i トスル. $a_i \geqq 0$.

prob. 1 ヲ以テ y_t ガ periodic デアルカラソノ Fourier series ヲ

(1) $$\sum_{n=0}^\infty A_n \cos nt$$

トスル。A_n ハ stochastic Fourier coeff. トイハレル。

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X_t \cos nt \, dt.$$

補助定理. $EA_n^2 = a_n$, $EA_iA_j = 0 \ (i \neq j)$

何トナレバ
$$EA_n^2 = E\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X_t \cos nt \, dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2}E\left(\int_0^{2\pi} X_t \cos nt \, dt \int_0^{2\pi} X_u \cos nu \, du\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}du\ \cos nt\cos nu\ E X_t X_u$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}du\cos nt\ \cos\ nu\ \rho(t-u)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}du\cos nt\cos nu\sum_0^{\infty}a_\nu\cos\nu(t-u)$$

$$=\sum_0^{\infty}a_\nu\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}du\cos nt\cos nu\cos\nu t\ \cos\nu u$$

$$+\sum_0^{\infty}a_\nu\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}du\ \cos nt\cos nu\ \sin\nu t\sin\nu u$$

コノ第一項ノ$\sum$ノ中デハ $\nu=n$ ノトキノミ 0ト異ナリ他ハスベテ0デアル。故ニ

$$EA_n^2=a_n$$

$EA_iA_j=0$モ同様ニ出來ル。

定理2. 殆ンドスベテノ t ニ對シテ (1) ガ X_t ヘ收斂スル確率ガ1デアル。

コノ定理ハ次ノ定理ニ含マレル。

定理3. $S_n(t)$ ヲ (1) ノ n-th partial sum トシ $n(t)$ ヲ integral valued function デ $n(t)\leqq n$ トスルト probability 1 ヲ以テ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{S_{n(t)}(t)\right\}^2dt\leqq O(1)$$

$$S_{n(t)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\psi_\nu(t)A_\nu\cos\nu t$$

コヽニ $\psi_\nu(t)$ ハ一ツノ t-set-E_ν デ1ニナリ他デハ0ニナル函數デアル。

但シ $E_\nu \geqq E_{\nu+1}$。従ッテ $\psi_\nu(t)$ ハ non-increasing sequence デアル。

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ S_{n(t)}(t) \right\}^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \psi_\nu(t) A_\nu \cos \nu t \right)^2 dt$$

$$\Delta\psi_\nu(t) = \psi_\nu(t) - \psi_{\nu+1}(t) \qquad \nu < n$$

$$\Delta\psi_n(t) = \psi_n(t)$$

トスレバ

$$\leqq \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \Delta\psi_\nu(t) S_\nu(t) \right)^2 dt$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \Delta\psi_\nu(t) \sum_{\nu=0}^{n} \Delta\psi_\nu(t) S_\nu^2(t) \right) dt$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \Delta\psi_\nu(t) S_\nu^2(t)\, dt$$

故ニ

$$EI \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{2\pi} \Delta\psi_\nu(t)\, ES_\nu^2(t)\, dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{2\pi} \Delta\psi_\nu(t)\, E\Big(\sum_{k=0}^{\nu} A_k^2 \cos^2 kt$$

$$+ 2 \sum_{0 \leqq k < j \leqq \nu} A_k A_j \cos kt \cos jt \Big)\, dt$$

補助定理ニヨリ

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{2\pi} \Delta \psi_\nu(t) \sum_{k=0}^{\nu} a_k \cos^2 kt \, dt$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{2\pi} \Delta \psi_\nu(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{2\pi} \Delta \psi_\nu(t) \, dt \leqq \int_0^{2\pi} \psi_0(t) \, dt \leqq 2\pi$$

定理3カラ 2 ノ出ルコトハ Fourier series デヨク知ラレテキル通常ノ方法ニヨリ明カデアロウ。